MAI 2 Příklady - funkce více proměnných 2

1. Směrová derivace:

   a) Určete $g'(0)$, je-li $g(t) = f(x + a_1 t, y + a_2 t)$, kde f je funkce diferencovatelná v bodě (x, y) a $\vec{a} = (a_1, a_2)$ je vektor o velikosti $\|\vec{a}\| = 1$ ($g'(0)$ se nazývá derivace funkce f v bodě (x, y) ve směru $\vec{a}$). Pokuste o totéž, je-li f funkce n proměnných ($n \geq 3$).

   b) Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \log(x + y)$ v bodě $(1,2)$, ležícím na parabole $y^2 = 4x$ ve směru jednotkového vektoru, tečného k parabole v tomto bodě.

   c) Zjistěte, zda funkce $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a} = (2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

   d) Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $X_0 \in R^n$ a $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$, pak vektor $\nabla f(X_0)$ udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě X_0.

Derivace složené funkce více proměnných:

2. „Technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla (jaké to jsou předpoklady?)

   a) Je-li $g(t) = f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci f a pak pro $f(x, y) = x^y$.

   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.

   c) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce $g(x, y)$, je-li

      (i) $g(x, y) = f(x^2 y, \frac{x}{y})$; (ii) $g(x, y) = f(x^2 + y^2, xy, \frac{y}{x})$; (iii) $g(x, y) = F(x, y, \varphi(x, y))$.

   d) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce $g(x, y, z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.

a užití :

3. Najděte funkci $f(x, y)$, která splňuje parciální diferenciální rovnici $x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} - y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ pomocí transformace rovnice do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi$, $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

4. Najděte řešení $u(t, x)$ pro $t \geq 0$ a $x \in R$ vlnové rovnice $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ($a > 0$), které splňuje počáteční podmínky $u(0, x) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, x) = \psi(x)$ pro $x \in R$, pomocí transformace $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.